MAI 2 – domácí úkol ze cvičení 5
(vyberte si z uvedených příkladů, na kterých si můžete „zkusit" substituci a také i zopakovat integraci racionálních funkcí)

(Najděte primitivní funkce na maximálních otevřených intervalech.)

Integrály, které pomocí vhodných substitucí vedou na integraci racionálních funkcí:

1. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$ nebo $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

2. $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,dx$; $\int \frac{1}{\sin^2 x + tg^2 x}\,dx$;

   a „slepování" primitivní funkce: $\int \frac{1}{2+\cos^2 x}\,dx$ nebo $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$ nebo $\int \frac{2+\sin x}{2-\sin x}\,dx$.

3. Zkuste i integrály typu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$:

   návod – vhodné substituce:

   $a>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x\pm t$ nebo $c>0$: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{c}+xt$ (Eulerovy substituce)

   $a<0$ a polynom ax^2+bx+c má dva různé reálné kořeny $\alpha_1<\alpha_2$:

   pak lze

   $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\,(x-\alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}} \quad \text{a substituovat} \quad \sqrt{\frac{\alpha_2-x}{x-\alpha_1}}=t \quad \text{nebo}$$

   $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\,(\alpha_2-x)\sqrt{\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-x}} \quad \text{a substituovat} \quad \sqrt{\frac{x-\alpha_1}{\alpha_2-x}}=t$$

   (a třeba najdete i jiné substituce):

   (i) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$; (ii) $\int \frac{x}{\sqrt{6+x-x^2}}\,dx$;

   (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ také lze $x=\cosh t$ ($\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ a $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$)

   nebo

   $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (zkuste také $t=\frac{1}{x}$, $t=1+x^2$, $t=\sqrt{1+x^2}$ nebo $x=\sinh t$) .

A navíc, pokud by Vás to bavilo, můžete zkusit vyřešit i diferenciální rovnici:

4. Je dána diferenciální rovnice $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot(2-y)$.

   Najděte taková řešení dané rovnice, která splňují podmínku (tzv. počáteční)

   i) $y(0)=2$, ii) $y(0)=0$, iii) $y(0)=3$.

   Načrtněte jejich grafy.